الکترومغناطیس

ثابت‌ها

ثابت‌های مورد استفاده در روابط الکترومغناطیس در ادامه آمده‌اند.

$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N.m^2}$

$\mu_0 = 4\,\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Wb/A.m}$

$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$

$e = 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$

$m_e = 9.1 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$

$m_p = 1.7 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$

$c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3.0 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}$

$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 \times 10^{9}\ \mathrm{Nm^2/C^2}$

بار، جریان و میدان الکترومغناطیسی

نیروی وارد بر بار (لورنتس):

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

نیروی بین دو بار:

$$F = k\frac{qQ}{r^2}$$

میدان یک بار نقطه‌ای:

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

نیروی وارد بر جریان الکتریکی:

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B} = \int \vec{J} \times \vec{B}\, d^3x$$

شار الکتریکی:

$$\Phi_E = \iint_A \vec{E}.\hat{n} dA$$

میدان در سطح هادی:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

دو هادی با بارهای $\boldsymbol{Q}$ و $\boldsymbol{-Q}$:

$$Q = CV$$

$$W = \frac{1}{2}CV^2$$

قانون گاوس:

$$\Phi = \oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{m} q_i = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

شار مغناطیسی:

$$\Phi_B = \iint_A \vec{B}.\hat{n}\, dA$$

بردار پتانسیل:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3x'$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = 0 \ \ , \ \ \vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

$$\nabla^2 A = -\mu_0 J$$

قانون بیو – ساوار:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \hat{r}}{4\pi r^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3x$$

معادلات ماکسول

فرم دیفرانسیلی معادلات ماکسول	فرم انتگرالی معادلات ماکسول
قانون گاوس: $\nabla . E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	قانون گاوس: $\oiint_A \vec{E}.\hat{n}\, dA = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$
عدم وجود تک قطبی مغناطیسی: $\nabla . B = 0$	عدم وجود تک قطبی مغناطیسی: $\oiint_A \vec{B}.\hat{n} dA = 0$
قانون فارادی: $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	قانون فارادی: $\mathcal{E} = \oint_l \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$
قانون آمپر: $\nabla \times B = \mu_0 \left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$	قانون آمپر: $\oint_l \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

در صورت عدم وجود بار یا جریان:

$$\nabla . E = 0$$

$$\nabla . B = 0$$

$$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times B - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

الکتریسیته و مغناطیس ساکن

نیروی الکتریکی وارد بر بار: $\vec{F} = q\vec{E}$	نیروی مغناطیسی وارد بر جریان: $\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B} = \int \vec{J} \times \vec{B} d^3x$
$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}')q_i}{\lvert\vec{r} - \vec{r}'\rvert^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\lvert\vec{r} - \vec{r}'\rvert^3} \rho(\vec{r}') d^3x'$	چگالی جریان روی سطح S: $I_s = \int_S \vec{J}.d\vec{s}$
پتانسیل الکترواستاتیکی: $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r}$	قانون بقای بار: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}.\vec{J}$
	چگالی بار متحرک: $\vec{J} = \rho \vec{v}$

اختلاف پتانسیل:

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}').d\vec{l}'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3x'$$

روابط میدان:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

معادله پواسون:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

معادله لاپلاس:

$$\rho = 0 \rightarrow \nabla^2 V = 0$$

منابع میدان الکتریکی و مغناطیسی

میدان الکتریکی (بار نقطه‌ای):

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

چگالی بار و قانون گاوس:

$$Q = \int_R \rho dV$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r'\in R} \frac{\rho(r')}{|r-r'|^3}(\hat{r}-\hat{r}')dV'$$

میدان مغناطیسی:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}$$

حالت انتگرالی میدان مغناطیسی:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{Id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

قضیه پیوستگی:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla.J = 0$$

انرژی

انرژی ذخیره شده در دو یا چند بار الکتریکی:

$$W = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x\, d^3x' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$W = \frac{1}{2}\int d^3x \rho(\vec{r})V(\vec{r}) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int |\vec{E}|^2 d^3x$$

انرژی در میدان الکتریکی و مغناطیسی:

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

بردار پوینتینگ:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})$$

قضیه پوینتینگ:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla.P = -E.J$$

حرکت در میدان مغناطیسی:

$$R = \frac{mv}{|q|B}$$

دوقطبی‌ها

دوقطبی الکتریکی:

$$\vec{p} = \int \rho(\vec{r})\vec{r}d^3x = q\vec{d}$$

$$\rho_{dipole}(\vec{r}) = -\vec{p}.\vec{\nabla}_{\vec{r}}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_d)$$

$\vec{r}_d =$ بردار مکان دوقطبی

نیروی وارد بر دوقطبی:

$$\vec{F} = (\vec{p}.\vec{\nabla})\vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{p}.\vec{E})$$

گشتاور وارد بر دوقطبی:

$$\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}$$

انرژی ذخیره شده در دوقطبی:

$$U = -\vec{p}.\vec{E}$$

دوقطبی مغناطیسی:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}I\int_P \vec{r}\times d\vec{l} = \frac{1}{2}\int d^3x\vec{r}\times\vec{J} = I\vec{a}$$

$$\vec{J}_{dipole} = -\vec{m}\times\vec{\nabla}_{\vec{r}}\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_d)$$

نیروی وارد بر دوقطبی مغناطیسی:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m}.\vec{B})$$

گشتاور دوقطبی مغناطیسی:

$$\vec{\tau} = \vec{m}\times\vec{B}$$

انرژی ذخیره شده در دوقطبی:

$$U = -\vec{m}.\vec{B}$$

میدان الکتریکی و مغناطیسی در ماده

مواد قطبی شده به صورت الکتریکی:

$\vec{P}(\vec{r}) =$ قطبیت

$=$ ممان دوقطبی الکتریکی بر حسب واحد حجم

$$\rho_{bound} = -\nabla.\vec{P}$$

$$\sigma_{bound} = \vec{P}.\hat{n}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho_{free}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

شرایط مرزی:

$$E^{\perp}_{above} - E^{\perp}_{below} = E^{+}.n - E^{-}.n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$E^{||}_{above} - E^{||}_{below} = E^{+}.t - E^{-}.t = 0$$

$$D^{\perp}_{above} - D^{\perp}_{below} = \sigma_{free}$$

$$D^{||}_{above} - D^{||}_{below} = \vec{P}^{||}_{above} - \vec{P}^{||}_{below}$$

دی‌الکتریک خطی:

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E}$$

$\chi_e =$ پذیرنگی الکتریکی

$\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi_e) =$ گذردهی الکتریکی

مواد قطبی شده به صورت مغناطیسی:

$\vec{M}(\vec{r}) =$ مغناطش $=$

$=$ ممان دوقطبی مغناطیسی بر حسب واحد حجم

$$\vec{J}_{bound} = \vec{\nabla}\times\vec{M}$$

$$\vec{K}_{bound} = \vec{M}\times\hat{n}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_{free}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

شرایط مرزی:

$$B^{\perp}_{above} - B^{\perp}_{below} = B^{+}.n - B^{-}.n = 0$$

$$\vec{B}^{||}_{above} - \vec{B}^{||}_{below} = B^{+}.t - B^{-}.t = 0 = \mu_0(\vec{K}\times\hat{n})$$

$$H^{\perp}_{above} - H^{\perp}_{below} = -(M^{\perp}_{above} - M^{\perp}_{below})$$

$$\vec{H}^{||}_{above} - \vec{H}^{||}_{below} = \vec{K}_{free}\times\hat{n}$$

مواد مغناطیسی خطی:

$$\vec{M} = \chi_m\vec{H}$$

$\chi_m =$ پذیرندگی مغناطیسی

$\mu = \mu_0(1+\chi_m) =$ نفوذپذیری مغناطیسی

$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi_e =$ ثابت دی‌الکتریک یا گذردهی نسبی

انرژی ذخیره شده در ماده دی‌الکتریک خطی:

$$W = \frac{1}{2}\int \vec{D}.\vec{E} d^3x$$

انرژی ذخیره شده در ماده مغناطیسی خطی:

$$W = \frac{1}{2}\int \vec{B}.\vec{H} d^3x$$

$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m =$ نفوذپذیری نسبی

تک‌قطبی مغناطیسی:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m}{r^2}$$

نیروی وارد بر تک‌قطبی ساکن:

$$\vec{F} = q_m \vec{B}$$

تکانه زاویه‌ای برای یک سیستم تک قطبی-بار:

$$\vec{L} = \frac{\mu_0 q_e q_m}{4\pi}\hat{r}$$

میدان مغناطیسی برای برخی اجسام

سیم مستقیم بی‌نهایت:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi}$$

سیم‌پیچ سلنوئیدی بی‌نهایت طویل:

$$B = \mu_0 n I_0 \hat{z}$$

(n تعداد دور است.)

حلقه جریان روی محور **z**:

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}\hat{z}$$

صفحه جریان بی‌نهایت:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\mu_0 \vec{K} \times \hat{n}$$

که $\hat{n}$ بردار واحد در راستای $\vec{r}$ است.

جریان‌های الکتریکی

جریان:

$$I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_d A$$

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d \quad , \quad \rho = \frac{E}{J}$$

قوانین کیرشهف:

$$\sum_{\text{حلقه}} V = 0 \quad , \quad \sum_{\text{گره}} I = 0$$

سلف (تکی)

$$\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt} \quad , \quad L = \frac{N\Phi_B}{i} \quad , \quad L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}$$

انرژی ذخیره شده در سلف:

$$U = \frac{1}{2}Li^2$$

اندوکتانس متقابل:

$$\mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt} \quad , \quad \mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt} \quad , \quad M = \frac{N_2\Phi_{B_2}}{i_1} = \frac{N_1\Phi_{B_1}}{i_2}$$

مقاومت

- قانون اهم:

$$V = IR \quad , \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

- مقاومت معادل:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \text{(موازی)}$$

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i \text{ (سری)}$$

$$R = \frac{\rho L}{A}$$

$$P = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

خازن

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} \text{(سری)} \quad , \quad C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i \text{ (موازی)}$$

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

مدار RC

- شارژ:

$$q = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}$$

- دشارژ:

$$q = Q_0 e^{-t/RC}$$

$$i = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

مدار RL

$$\tau = \frac{L}{R}$$

- افزایش جریان:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right)$$

- کاهش جریان:

$$i = I_0 e^{-(R/L)t}$$

مدار LC:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad , \quad q = Q\cos(\omega t + \phi)$$

مدار RLC:

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad , \quad q = Ae^{-(R/2L)t}\cos(\omega' t + \phi)$$

ترانسفورماتور:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$V_1 I_1 = V_2 I_2$$

مدار AC:

$$I_{rms} = \frac{I}{\sqrt{2}} \quad , \quad V_{rms} = \frac{V}{\sqrt{2}}$$

$$i = I\cos\omega t \quad , \quad v = V\cos(\omega t + \phi)$$

$$V_R = IR \quad , \quad V_L = IX_l \quad , \quad V_C = IX_C$$

مدارهای RLC:

$$V = IZ \quad , \quad Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad , \quad \tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

توان در مدارهای AC:

$$P_{av} = \frac{1}{2} VI\cos\phi = V_{rms} I_{rms} \cos\phi$$

امواج الکترومغناطیسی

امواج در فضای آزاد:

$E = cB$

$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$

$c = f\lambda$

ضریب شکست:

$n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$

انعکاس - انکسار:

$\theta_a = \theta_r$

$n_a \sin\theta_a = n_b \sin\theta_b$

$\sin\theta_{crit} = \frac{n_b}{n_a}$

انرژی (تکانه):

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$

$p_{rad} = \frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{S}{C}$

امواج الکترومغناطیسی سینوسی (در جهت $+x$):

$\vec{E} = \hat{j}E_{max}\cos(kx - \omega t)$

$\vec{B} = \hat{k}B_{max}\cos(kx - \omega t)$

$E_{max} = cB_{max}$

$I = S_{av} = \frac{E_{max}B_{max}}{2\mu_0}$

قطبیت:

$I = I_0 \cos^2\phi$

$\tan\theta_p = \frac{n_b}{n_a}$

تعریف گرادیان، کرل و دیورژانس

گرادیان (تابع اسکالر، پاسخ اسکالر):

$\nabla f = gradf$

$= < \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} >$

$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$

$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{\nabla}\phi . d\vec{l} = \phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a})$

دیورژانس (تابع برداری، پاسخ اسکالر):

$divE = \vec{\nabla}.\vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S E.dS}{\Delta V}$

$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$

قضیه دیورژانس:

$\oint_S \vec{A}.d\vec{S} = \int_v \vec{\nabla}.\vec{A}\, dv$

S سطح در بر دارنده حجم V است.

کرل (تابع برداری، پاسخ برداری):

$$(curlA)_x = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_C A.dl}{\Delta S}$$

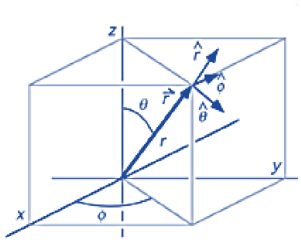
$$\nabla \times A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

قضیه استوکس:

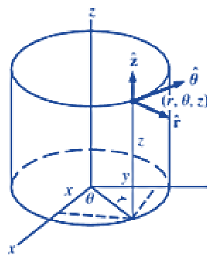
$$\oint_C \vec{A}.d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}).d\vec{S}$$

C منحنی در بر دارنده سطح S است.

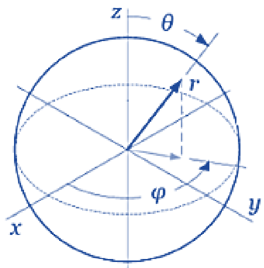
گرادیان، دیورژانس و کرل در مختصات کارتزین، استوانه‌ای و کروی



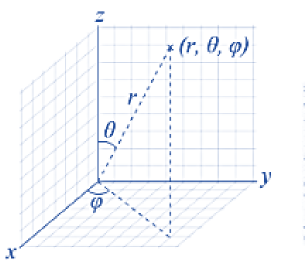
مختصات کارتزین

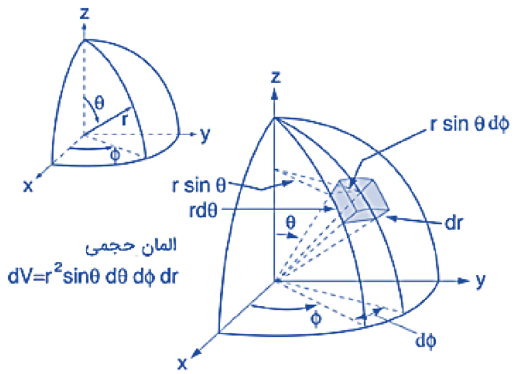


مختصات استوانه‌ای



مختصات کروی





مختصات کارتزین (x, y, z):

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla.D = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times H = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 A = \nabla^2 A_x \hat{x} + \nabla^2 A_y \hat{y} + \nabla^2 A_z \hat{z}$$

مختصات استوانه‌ای (ρ, ϕ, z):

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat{\Phi} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{\mathrm{z}}$$

$$\nabla.\mathrm{D} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathrm{H} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z}\right]\hat{r} + \left[\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}\right]\hat{\phi} + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rH_\phi\right)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\phi}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\mathrm{A} = \left(\nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} - \frac{A_r}{r^2}\right)\hat{\mathrm{r}} + \left(\nabla^2 A_\phi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{A_\phi}{r^2}\right)\hat{\Phi} + (\nabla^2 A_z)\hat{\mathrm{z}}$$

مختصات کروی (r, θ, ϕ):

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}\hat{\Phi}$$

$$\nabla.\mathrm{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, D_\theta) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times\mathrm{H} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(H_\phi\sin\theta) - \frac{\partial H_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{\mathrm{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rH_\phi)\right]\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right]\hat{\Phi}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

$$\nabla^2\mathrm{A} = \left[\nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2}\left(A_r + \cot\theta A_\theta + \csc\theta\frac{\partial A_\Phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\right)\right]\hat{\mathrm{r}} + \left[\left(\nabla^2 A_\theta - \frac{1}{r^2}\left(\csc^2\theta\, A_\theta - 2\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + 2\cot\theta\csc\theta\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right)\right]\hat{\theta} + \left[\left(\nabla^2 A_\phi - \frac{1}{r^2}\left(\csc^2\theta\, A_\phi - 2\csc\theta\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - 2\cot\theta\csc\theta\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\right]\hat{\Phi}$$

منبع [۱]، منبع [۲]، منبع [۳]، منبع [۴]

برای مشاهده دیگر «تقلب‌نامه‌های» مجله فرادرس، به این لینک مراجعه فرمایید.