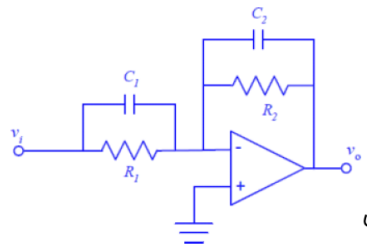
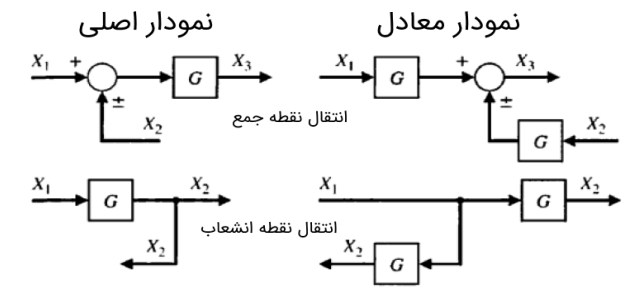
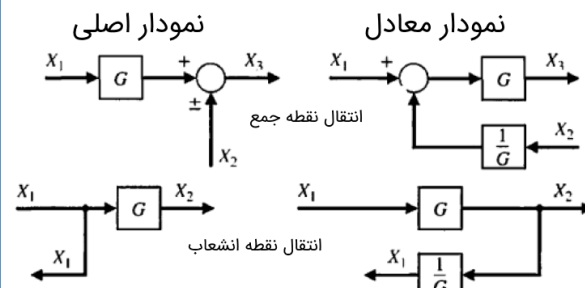
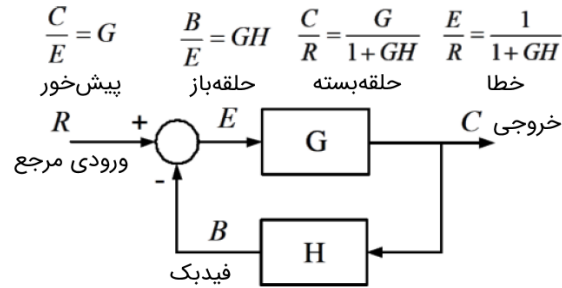


کنترل خطی

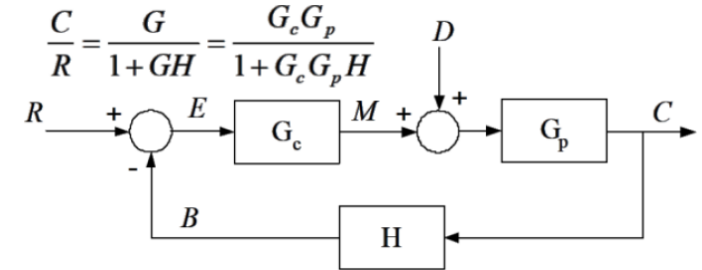
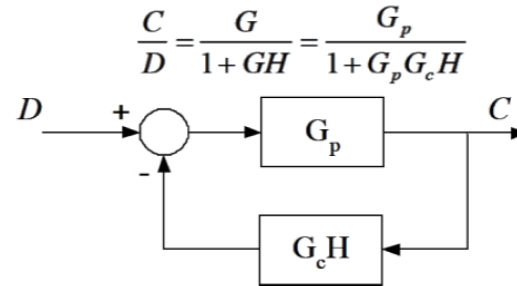
جبر نمودار بلوکی



$$z = \frac{1}{R} + \frac{1}{X} = \frac{R}{RCs + 1}$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{R_2(R_1C_1s + 1)}{R_1(R_2C_2s + 1)}$$

در حالت سری: $z = R + Cs = \frac{RCs + 1}{Cs}$



فرمول بهره میسون (Mason's Gain Formula)

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum_{i=1}^N P_i \Delta_i}{\Delta}, \quad \Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k + \dots + (-1)^m \sum \dots + \dots$$

- L_i : بهره هر حلقه از سیستم
- $L_i L_j$: حاصل ضرب بهره‌های دو حلقه از سیستم که تماسی با هم ندارند.
- $L_i L_j L_k$: حاصل ضرب بهره‌های سه حلقه از سیستم که تماسی با هم ندارند.
- Δ_i : مقدار Δ برای مسیر پیش‌روی i ام که با حلقه‌های درگیر با همان مسیر در تماس نیست.

- $C(s)$: گره خروجی
- $R(s)$: گره ورودی
- $T(s)$: تابع تبدیل یا بهره بین $R(s)$ و $C(s)$
- P_i : بهره i امین مسیر پیش‌رو

پاسخ سیستم مرتبه اول

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$$

$$c(t) = K/T e^{-t/T}$$

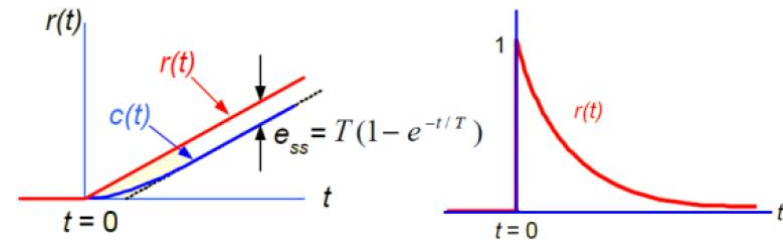
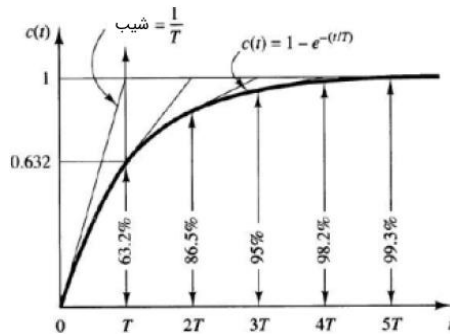
ضربه واحد

$$c(t) = K(1 - e^{-t/T})$$

پله واحد

$$c(t) = K(t - T - T e^{-t/T})$$

شیب واحد



پارامترهای پاسخ گذرا

$$t_r = \pi/\omega_d$$

زمان پیک

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}, \omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

فرکانس طبیعی میرا

$$t_s = 4T \text{ (2\%)}$$

زمان نشست

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\tan^{-1}(\sqrt{1 - \zeta^2}/-\zeta)}{\omega_d}$$

زمان صعود

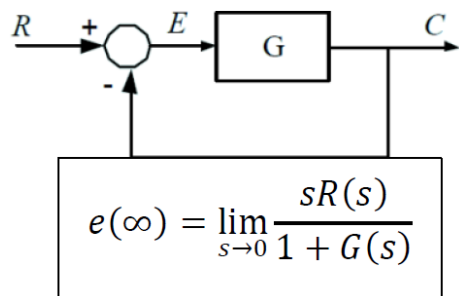
$$t_s = 4T \text{ (2\%) } T = 1/\zeta \omega_n$$

$$\int t e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}(st + 1)}{s^2}, \int (-t + 2)e^{-st} dt = \frac{e^{-st}(-as + st + 1)}{s^2}$$

$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$$

حداکثر فراجهش

خطای حالت ماندگار (Steady-State Error)



	ورودی سهمی $r = t^2/2$	ورودی شیب $r = t$	ورودی پله $r = 1$	
	∞	∞	$1/(1+K)$	سیستم نوع ۰
	∞	$1/K$	0	سیستم نوع ۱
	$1/K$	0	0	سیستم نوع ۲
	$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 G(s)}$	$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s G(s)}$	$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)}$	e_{ss}

معیار پایداری راث – هریتز (Routh-Hurwitz Criterion)

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0 \quad \leftarrow 1 + G(s)H(s) = 0$$

s^4	a_0	a_2	a_4
s^3	a_1	a_3	0
s^2	$(a_1 a_2 - a_0 a_3) / a_1$	a_4	$b_1 = (a_1 a_2 - a_0 a_3) / a_1$
s^1	$(b_1 a_3 - a_1 a_4) / b_1$	0	$b_2 = (b_1 a_3 - a_1 a_4) / b_1$
s^0	b_2		

- به ازای هر تغییر علامت در ستون اول، یک قطب سمت راست محور موهومی وجود دارد.
- اگر یکی از ضرایب یا همه آنها در یکی از سطرها محاسبه شده صفر باشد، بدین معنی است که ریشه‌هایی با اندازه برابر، به صورت متقارن نسبت به مبدأ قرار دارند. در این مورد، از چندجمله‌ای کمکی استفاده می‌کنیم که ضرایب آن از سطر قبلی به دست می‌آیند؛ بدین صورت که از معادله کمکی مشتق می‌گیریم و ضرایب مشتق را به جای ضرایب صفر قرار می‌دهیم.
- در حالت خاص صفر شدن درایه ستون اول یک سطر، متغیر کوچک اپسیلن (ϵ) را جایگزین صفر کرده و محاسبات را ادامه می‌دهیم. بعد از آنکه کل آرایه تشکیل شد، می‌توانیم مقدار ϵ را به صفر میل داده و مقدار حدی را محاسبه کنیم. در این صورت می‌توان راجع به تغییر علامت در ستون اول بحث کرد.

مکان ریشه (Root Locus)

۱. محل صفرها و قطبها را تعیین کنید. هر شاخه، از یک قطب شروع و به یک صفر ختم می‌شود. اگر صفر محدود وجود نداشته باشد، صفرها در بی‌نهایت قرار دارند.

۲. تعداد شاخه‌ها، برابر با تعداد قطبها یا همان مرتبه معادله مشخصه است. مکان ریشه‌ها روی محور حقیقی، در جایی وجود دارد که تعداد فردی قطب و صفر در سمت راست آن وجود داشته باشد.

$$\theta = \frac{n 180^\circ}{\text{تعداد صفرها} - \text{تعداد قطبها}}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 5, \dots$$

$$\sigma_a = \frac{\text{مجموع جبری صفرها} - \text{مجموع جبری قطبها}}{\text{تعداد صفرها} - \text{تعداد قطبها}} : \text{نقطه شروع مکان ریشه روی محور حقیقی}$$

۳. در نقاط شکست، رابطه $N(s)D'(s) - N'(s)D(s) = 0$ برقرار است. معادله مشخصه، به صورت $1 + KG(s)H(s) = 1 + K \frac{N(s)}{D(s)} = 0$ است.

۴. تقاطع با محور موهومی را به دو صورت می‌توان محاسبه کرد:

الف) از معیار راث برای تعیین مقدار k که به ازای آن، سیستم میرای بحرانی است.

ب) از آنجایی که ریشه‌ها روی محور موهومی قرار دارند، با قرار دادن $s = j\omega$ در معادله مشخصه، می‌توان آن را برای ω و K حل کرد.

۵. زاویه خروج از یک قطب مختلط p_j برابر است با: (مجموع زوایای بین p_j و قطبهای دیگر) - (مجموع زوایای بین p_j و همه صفرها) $+ 180^\circ$

۶. زاویه رسیدن به یک صفر مختلط z_j برابر است با: (مجموع زوایای بین z_j و همه قطبها) - (مجموع زوایای بین z_j و صفرهای دیگر) $+ 180^\circ$

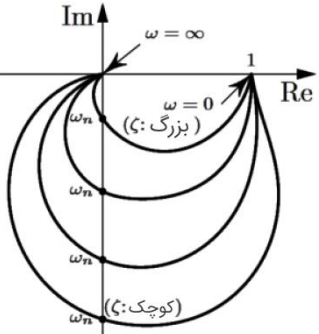
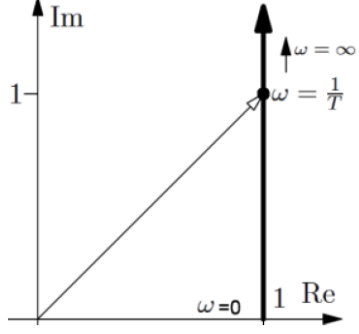
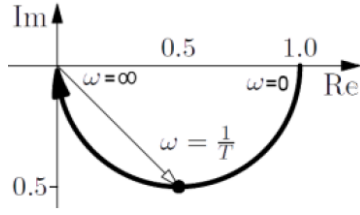
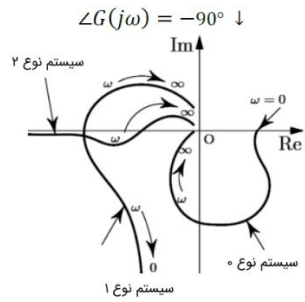
نمودار بُد (Bode Plot)

$$\text{خطا} = 20 \log_{10} \sqrt{2} = 3dB$$

$$y(t) = A_0 |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega)), \quad |G(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}(G(j\omega))^2 + \text{Im}(G(j\omega))^2}, \quad \angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}(G(j\omega))}{\text{Re}(G(j\omega))} \right]$$

زمان تأخیر	قطب مختلط	قطب	صفر	قطب در مبدأ	صفر در مبدأ	بهره	
$G(s)e^{-sT_d}$	$G(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1}$	$G(s) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_c} + 1}$	$G(s) = \frac{s}{\omega_c} + 1$	$G(s) = 1/s$	$G(s) = s$	$G(s) = K$	تابع
خط 0dB	$\omega = 1$ در 0dB ↘ شیب = -40 dB	$\omega \leq \omega_c$ در 0dB ↘ شیب = -20 dB	$\omega \leq \omega_c$ در 0dB ↗ شیب = 20 dB	$\omega = 1$ در 0dB ↘ شیب = -20 dB	$\omega = 1$ در 0dB ↗ شیب = 20 dB	$20 \log K$ خط راست	بهره
$\angle G(j\omega) = -\omega T_d$	$\omega \leq 0.1\omega_c, \angle G(j\omega) \rightarrow 0^\circ$ $\omega = \omega_c, \angle G(j\omega) = -90^\circ$ $\omega \geq 10\omega_c, \angle G(j\omega) \rightarrow -180^\circ$	$\omega \leq 0.1\omega_c, \angle G(j\omega) \rightarrow 0^\circ$ $\omega = \omega_c, \angle G(j\omega) = -45^\circ$ $\omega \geq 10\omega_c, \angle G(j\omega) \rightarrow -90^\circ$	$\omega \leq 0.1\omega_c, \angle G(j\omega) \rightarrow 0^\circ$ $\omega = \omega_c, \angle G(j\omega) = 45^\circ$ $\omega \geq 10\omega_c, \angle G(j\omega) \rightarrow 90^\circ$	-90°	90°	0°	فاز

نمودار قطبی (Polar Plot)

پس فاز مرتبه دوم	پیش فاز مرتبه اول	پس فاز مرتبه اول	انتگرال گیر	مشتق گیر	
$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + 1}$	$G(s) = sT + 1$	$G(s) = \frac{1}{sT + 1}$	$G(s) = 1/s$	$G(s) = s$	تابع
				$\angle G(j\omega) = 90^\circ \uparrow$	نمودار

معیار نایکوئیست (Nyquist Criterion)

تعداد قطب‌های حلقه بسته در سمت راست محور موهومی، برابر با مجموع تعداد دوران‌های نمودار نایکوئیست حول نقطه -1 و تعداد قطب‌های حلقه باز در نیم صفحه سمت راست محور موهومی است.

$\frac{1}{ G(j\omega)H(j\omega) }$	حاشیه بهره
فاز $G(j\omega)H(j\omega)$ در فرکانس عبور بهره $+180^\circ$	حاشیه فاز

فرکانس عبور بهره، فرکانسی است که در آن، اندازه بهره برابر با 1 است.

فرکانس عبور فاز، فرکانسی است که در آن، جابه‌جایی فاز -180° است.

مثال

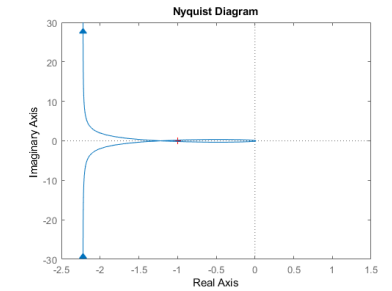
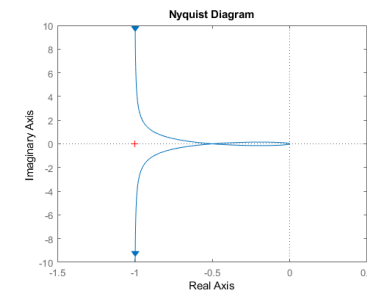
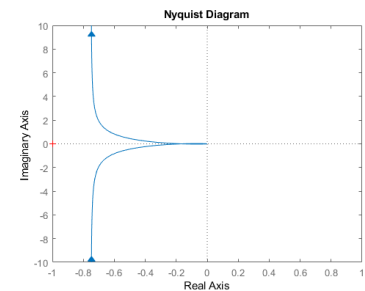
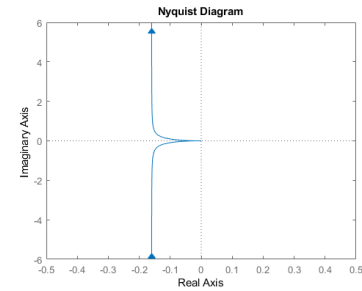
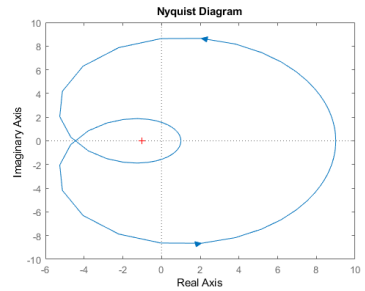
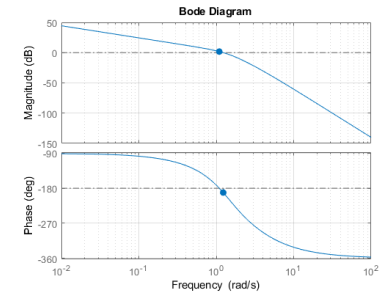
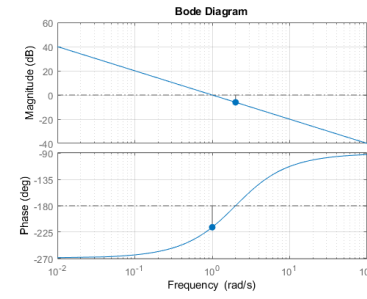
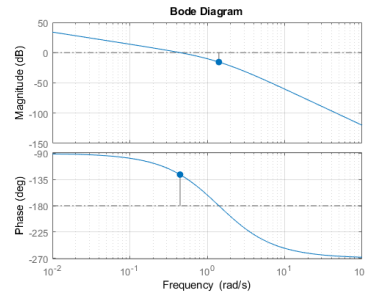
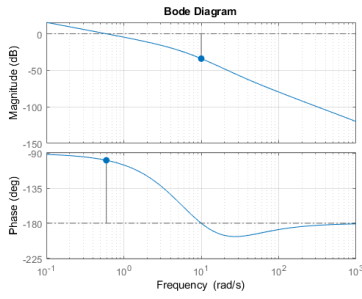
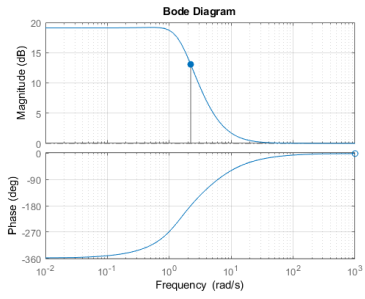
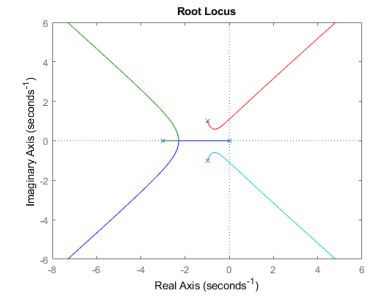
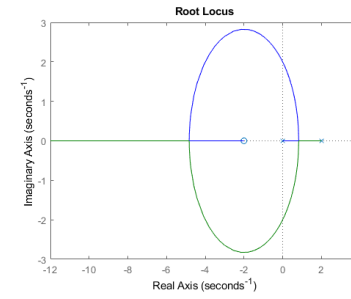
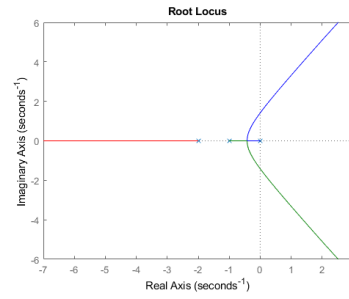
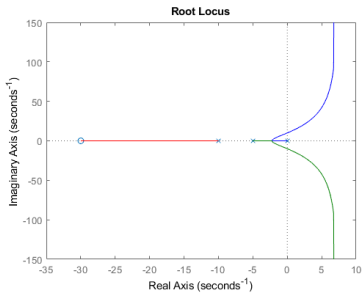
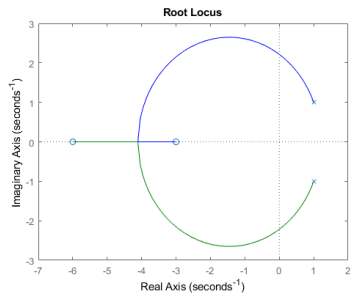
$$G(s) = \frac{(s + 3)(s + 6)}{(s - i + j)(s - 1 - j)}$$

$$G(s) = \frac{s + 30}{s(s + 5)(s + 10)}$$

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 1)(s + 2)}$$

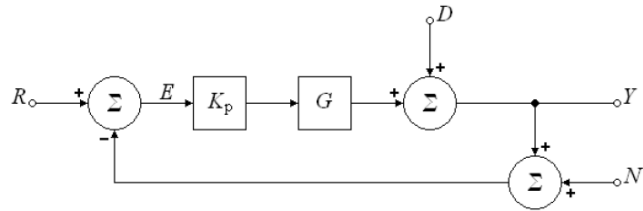
$$G(s) = \frac{s + 2}{s(s - 2)}$$

$$G(s) = \frac{10}{s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 6s}$$



دو نمودار بلوکی متداول

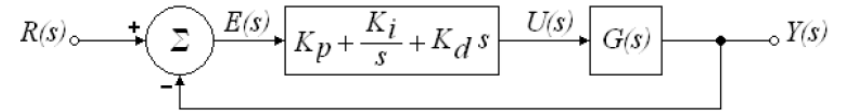
نمایش نویز و اغتشاش در سیستم



$$Y = \frac{K_p G}{1 + K_p G} R - \frac{K_p G}{1 + K_p G} N + \frac{1}{1 + K_p G} D$$

$$E = R - Y = \frac{1}{1 + K_p G} R + \frac{K_p G}{1 + K_p G} N - \frac{1}{1 + K_p G} D$$

نمایش کنترل کننده PID



$$U(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right) E(s)$$

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt}$$